1138. 結合束種ニ於ケル局所主イデアールトBoole代數ニ就テ

宮崎　貞　孝（東幼）

コレカラ述ベル結合束種ハ可換束群カラ剩元ナル概念從ッテ群演算ヲ除去シタモノデアリマシテ，其ノ代リ一四ツノ元ノ間ノ關係ニ依ッテ公理ガ與ヘラレマス。演算、絶對値、直交、主イデアール等ハスベテ任意ノ元ニ關シテ局所的ニ定義サレマス。此等ノ局所的ニ定義サレタ概念相互ノ關係ヲ研究シ，且ツ此レヨリ其ノ從屬代數トシテ可換束群ノ性質ヲ導クノガ結合束種論ノ目的デアリマス。尚ホ結合束種ニ關スル詳細ニツイテハ數物記事ニ近刊サレル拙論ヲ御參照下サイ。(1)

---

(1) *Verbandsart*, 數物記事（近刊）

§1. 結合種

集合Aノ元ヲ a, b, c, d, e, f 等トシ，其ノ元ノ間ニ (a, b, c, d) ニヨッテ表ハサレル関係ガ定義サレテヰルモノトスル。

1° 任意ノ元 a, b, c ニ對シテ (a, b, c, d) ヲ滿足スル元 d ガ一ツ而シテ唯一ツ存在スル，

2°. (a, b, c, d) ナラバ (b, a, c, d)

3°. (a, b, c, d) ナラバ (c, d, a, b)

4° (a, b, c, d), (e, b, c, f) ナラバ (d, e, a, f)

以上ノ4條件ガ滿足サレルトキAヲ結合種ト云フ。

結合種Aノ任意ノ元 p ニ關シテ演算

$$a +_p b = c$$

ヲ (a, b, c, p) ニ依ッテ定義スル。

定理1.1. 結合種Aハ演算 $a \underset{p}{+} b$ ニ關シテ p ヲ零元トスル abel 群ヲナス。[2]

定理1.2. (a, b, c, d) ナラバ任意ノ元 p ニ對シテ

$$a \underset{p}{+} b = c \underset{p}{+} d$$

---

(2) 宮崎貞孝. Über eine Menge, in der die Gleichartigkeit zwischen ihren Elementen definiert ist, I, 數物記事, 24. (1942)

§2. 結合束種

集合Vノ元ガ結合種ヲナスト共ニ束ヲナシ，(a, b, c, d)，$a \geqq c$ ナルトキ $d \geqq b$ ナラバ Vヲ結合束種ト云フ。

(脚註(1)ノ Verbandart デハ一般ナル束種カラ論ジタ関係上 (a, b, c, d) ナルトキ $a \smile b \geqq c \frown d$ ナル條件ガ加ッテ居リマスガ結合束種論ニハ不要ナノデ省キマシタ。)

定理2.1. 結合束種ハ演算 $a \underset{p}{+} b$ ニ関シテ pヲ零元トスル可換束群ヲナス。

証. $a \geqq b$ ナルトキ $a \underset{p}{+} c \geqq b \underset{p}{+} c$ ヲ証スレバ充分デアル。

$(p,\ a \underset{p}{+} c,\ a,\ c)$，$(p,\ b \underset{p}{+} c,\ b,\ c)$ カラ

$(a,\ b \underset{p}{+} c,\ a \underset{p}{+} c,\ b)$ ヲ得ル。此レト $a \geqq b$ カラ

$a \underset{p}{+} c \geqq b \underset{p}{+} c$ トナル。

$\underset{p}{-} a$ ハ $(a, \underset{p}{-} a, p, p)$ ニ依ッテ定義サレル。

$a \smile (\underset{p}{-} a) = |a|_p$ トオケバ，可換束群ニ於ケル定理カラ $|a|_p \geqq p$ 等ガ得ラレル。

定理2.2. $|a|_p \underset{q}{-} p = |a \underset{q}{-} p|_q$

証. $(a, \underset{p}{-} a, p, p)$ ヨリ $a \underset{q}{+} (\underset{p}{-} a) = p \underset{q}{+} p = \underset{q}{2} p$

（定理1.2ヨリ）　故ニ　$\overline{p}\,a = \frac{2}{q}\,p\,\overline{q}\,a$

$$|a|_p\,\overline{q}\,p = \{a \smile (\overline{p}\,a)\}\,\overline{q}\,p = (a\,\overline{q}\,p)\smile(\overline{p}\,a\,\overline{q}\,p)$$

$$= (a\,\overline{q}\,p)\smile(\tfrac{2}{q}\,p\,\overline{q}\,a\,\overline{q}\,p)$$

$$= (a\,\overline{q}\,p)\smile(p\,\overline{q}\,a) = |a\,\overline{q}\,p|_q$$

§3. 直交因子

$|a|_p \frown |b|_p = p$ ヲ満足スル元 p ヲ二元 a, b ノ直交因子ト云フ。

定理3.1. p ガ a, b ノ直交因子デアルタメノ完全條件ハ　$|a\,\overline{q}\,p|_q \frown |b\,\overline{q}\,p|_q = q$

但シ q ハ任意ノ元トスル。

証．定理2.2.ヨリ明カデアル。

$|a\,\overline{q}\,p|_q \frown |b\,\overline{q}\,p|_q = q$ ニ於テ特ニ $q = a$ ト置ケバ　$|\overline{a}\,p|_a \frown |b\,\overline{a}\,p|_a = a$　即チ

$|p|_a \frown |b\,\overline{a}\,p|_a = a$ トナルカラ p ハ a ニ關スル b ノ部分デアル。[3]

定理3.2.　$a,\ b,\ a \frown b,\ a \smile b$ ハ a ト b トノ直交因子デアル。

---

(3)　中野秀五郎, *Teilweise geordnete Algebra*, 日本數學輯報 17 (1941), §5, Def. 5.1.

証. $|a|_a \frown |b|_a = a \frown |b|_a = a$

ヨリ a ハ a, b ノ直交因子デアル。同様ニ b モ直交因子デアル。次ニ $a \geqq a \frown b$ ヨリ

$$|a|_{a\frown b} = a.$$

依ッテ $|a|_{a\frown b} \frown |b|_{a\frown b} = a \frown b$

又 $a \leqq a \smile b$ ヨリ $\overline{a\smile b}\, a \geqq a$ トナルカラ

$$|a|_{a\smile b} \frown |b|_{a\smile b} = (\overline{a\smile b}\, a) \frown (\overline{a\smile b}\, b)$$

$$= \overline{a\smile b}\,(a \smile b) = a \smile b$$

定理3.3. p, q ガ a, b ノ直交因子ナラバ, p, q 直交因子ハ a, b ノ直交因子デアル。

証 $|a|_p \frown |b|_p = p,$

$$|a|_q \frown |b|_q = q,$$

$$|p|_r \frown |q|_r = r$$

トスレバ定理3.1ヨリ

$|a \underset{r}{-} p|_r \frown |b \underset{r}{-} p|_r = r$ (以下 r ニ関スル演算ノミデアルカラ添元 r ヲ省略スル)

$$r = |a-p| \frown |b-p|$$

$$= \{(a-p)\smile(p-a)\} \frown \{(b-p)\smile(p-b)\}$$

$$\geqq \{(a-p)\frown(-b-p)\} \frown \{(a+p)\frown(p-b)\}$$

$$= [\{a\frown(-b)\}-p] \frown [\{a\frown(-b)\}+p]$$

$$= \{(-p)\frown p\} + \{a\frown(-b)\}$$

此レヨリ $p \smile (-p) \geqq a \frown (-b)$

ヲ得ル。

同様ニ $p \smile (-p) \geqq b \frown (-a)$

又 $p = |a|_p \frown |b|_p$ ヨリ

$$a \smile b \geqq p \geqq a \frown b$$

ヲ得ルカラ

$$p \smile (-p) \geqq (a \frown b) \smile \{(-a) \frown (-b)\}$$

従ッテ

$$|p| \geqq (a \frown b) \smile \{(-a) \frown (-b)\} \smile \{a \frown (-b)\} \smile \{(-a) \frown b\}$$

即チ $|p| \geqq |a| \frown |b|$ トナル。

同様ニ $|q| \geqq |a| \frown |b|$

故ニ $|p| \frown |q| \geqq |a| \frown |b|$

即チ $r \geqq |a| \frown |b|$

然ルニ $|a| \frown |b| \geqq r$ ヨリ

$$|a| \frown |b| = r$$

定理3.4. (a, b, p, q) デ p ガ a, b ノ直交因子デアレバ, q ハ a, b ノ直交因子デアル。

証 $|a|_p \frown |b|_p = p$ ヨリ

$|a \underset{q}{-} p|_q \frown |b \underset{q}{-} p|_q = q$（以下 q ニ関スル演算）

$a - p = -b,\ b - p = -a$ ヨリ

$$|-b| \frown |-a| = q$$

即チ $|a| \frown |b| = q$

(a, b, p, q) デ p, q ガ a, b ノ直交因子デアルトキ，p ト q トハ a, b ノ共軛ナル直交因子デアルト云フ。

定理3.5. $a \frown b$, $a \smile b$ ハ a, b ノ共軛ナル直交因子デアル。

証 $(a, b, a \smile b, a \frown b)$ ヨリ。

定理3.6. p, q ガ a, b ノ共軛ナル直交因子デアレバ a, b ハ p, q ノ共軛ナル直交因子デアル。

証 $|a \overline{a} p|_a \frown |b \overline{a} p|_a = a$

又 (a, b, p, q) ヨリ $b \overline{a} p = q$

依ッテ $|p|_a \frown |q|_a = a$

同様ニ b モ p, q ノ直交因子トナル。

c, d ガ a, b ノ共軛ナル直交因子デアルトキ $(a, b, c, d)_k$ ト記ス。

定理3.7. $(a, b, c, d)_k$, $(c, d, e, f)_k$ ナラバ $(a, b, e, f)_k$

証 (a, b, c, d), (c, d, e, f) デアルカラ (a, b, e, f) トナル。而シテ定理3.3ニヨリ e ハ a, b ノ直交因子トナルカラデアル。

定理3.8. $(a, b, c, d)_k$, $(e, b, c, f)_k$ ナラバ $(d, e, a, f)_k$ トナル。

証 $|a|_c \frown |b|_c = c$

$$|e|_c \frown |b|_c = c$$

ヨリ $$|e \underset{c}{-} a|_c \frown |b|_c = c$$

又 $b = d \underset{c}{-} a$ デアルカラ

$$|e \underset{c}{-} a|_c \frown |d \underset{c}{-} a|_c = c$$

依ッテ a ハ d ト e トノ直交因子デアル。

次ニ (a, b, p, q) ヨリ $(a \frown b, a \smile b, p \frown q, p \smile q)$ トナルカラ $p \frown q = a \frown b$ ヨリ $p \smile q = a \smile b$.
依ッテ q ハ p ノ補元デアル。

以上ヨリ $\mathcal{B}(ab)$ ハ $a \smile b$, $a \frown b$ ヲ夫々 $1, 0$ トスル Boole 代数ヲナスコトガ分ル。

定理4.2. $\mathcal{B}(ab) = \mathcal{B}(cd)$ デアルタメノ完全條件ハ $(a, b, c, d)_k$

証 $(a, b, c, d)_k$ ヨリ c, d ノ直交因子ハ a, b ノ直交因子トナリ, 又 a, b ノ直交因子ハ c, d ノ直交因子トナルカラ $\mathcal{B}(ab) = \mathcal{B}(cd)$ ヲ得ル.

逆ニ $\mathcal{B}(ab) = \mathcal{B}(cd)$ トスレバ $\mathcal{B}(ab)$ ノ最大元, 最小元デアル $a \smile b$, $a \frown b$ ト $\mathcal{B}(cd)$ ノ最大元, 最小元デアル $c \smile d$, $c \frown d$ トハ夫々一致シナケレバナラナイ。$(a, b, a \smile b, a \frown b)_k$, $(c, d, c \smile d, c \frown d)_k$ ヨリ $(a, b, c, d)_k$ トナル.

定理4.3. $\mathcal{B}(ab) = \mathcal{B}(a \smile b, a \frown b)$

定理4.4. a, b ヲ夫々 $1, 0$ トスル Boole 代数ノ元ハ $\mathcal{B}(ab)$ ニ含マレル.

証　a, b ヲ夫々 $1, 0$ トスル Boole 代数ノ任意ノ元ヲ p トスレバ，$p \cup q = a$，$p \cap q = b$ ナル元 q ガ存在スル。（以下 b ニ関スル演算）

$$(a - p) \cap p = \{(p \cup q) - p\} \cap p$$
$$= \{b \cup (q - p)\} \cap p$$

然ルニ　$p \cap q = b$ ヨリ $b \cap (q - p) = -p$

即チ　$b \cup (p - q) = p.$

依テ　$\{b \cup (q - p)\} \cap p = \{b \cup (q - p)\} \cap \{b \cup (p - q)\}$
$$= (q - p)_+ \cap (q - p)_- = b$$

従ッテ　$(a - p) \cap p = b$

トナリ，p ハ a, b ノ直交因子トナル。

§5. $\mathfrak{A}(a\,b)$

$|b|_a \cap |x|_a = a$ ナル總テノ x ニ對シテ，$|y|_a \cap |x|_a = a$ ヲ満足スルスベテノ y ノ集合ヲ $\mathfrak{A}(a\,b)$ デ表ハシ，此レヲ局所主イデアールト云フ。

定理5.1.　$\mathfrak{A}(a\,b) = \mathfrak{A}(b\,a)$

証　$p \in \mathfrak{A}(b\,a)$ トスル。

$|b|_a \cap |x|_a = a$ トスレバ定理3.1ヨリ

$$|a|_b \cap |x \underset{b}{-} a|_b = b$$

トナル。

依テ　$|x \underset{b}{-} a|_b \cap |p|_b = b$

故ニ　$|x \underset{b}{-} a|_b \cap |p \underset{b}{-} a|_b = b$

即チ　$|x|_a \frown |p|_a = a$

コレヨリ　$p \in \mathfrak{A}(ab)$

従ッテ　$\mathfrak{A}(ba) \subseteqq \mathfrak{A}(ab)$

同様ニ　$\mathfrak{A}(ab) \subseteqq \mathfrak{A}(ba)$

故ニ　$\mathfrak{A}(ab) = \mathfrak{A}(ba)$

定理5.2.　$a, b \in \mathfrak{A}(ab)$

定理5.3.　$c, d \in \mathfrak{A}(ab)$ ナラバ

$$\mathfrak{A}(cd) \subseteqq \mathfrak{A}(ab)$$

証.　$|b|_a \frown |x|_a = a$ ナル x ニ對シテ $c, d \in \mathfrak{A}(ab)$ ヨリ（以下添元ナキ場合ハ a ニ関スル演算）.

$$|c| \frown |x| = a, \quad |d| \frown |x| = a$$

故ニ　$|d-c| \frown |x| = a$

ヲ得ル。

$y = x + c$ ト置ケバ

$$|d-c| \frown |y-c| = a$$

即チ　$|d|_c \frown |y|_c = c$ トナル。

$p \in \mathfrak{A}(cd)$ トスレバ

$|p|_c \frown |y|_c = c$ カラ

$$|p-c| \frown |y-c| = a$$

$$|p-c| \frown |x| = a$$

此レト　$|c| \frown |x| = a$ トカラ　$|p| \frown |x| = a$

從ッテ　$p \in \mathfrak{A}(ab)$

即チ　$\mathfrak{A}(cd) \subseteqq \mathfrak{A}(ab)$

定理5.4. $\mathfrak{B}(ab) \subseteqq \mathfrak{A}(ab)$

証. $c \in \mathfrak{B}(ab)$ トスレバ

$$|a|_c \frown |b|_c = c$$

今 $|a|_b \frown |x|_b = b$ トスレバ (以下 b ニ関スル演算)

b ハ a ト x トノ直交因子デアリ, 又 a ハ a ト x トノ直交因子デアルカラ, a ト b トノ直交因子デアル c ハ a ト x トノ直交因子トナル。(定理3.3) 依ッテ

$$|a-c| \frown |x-c| = b$$

然ルニ $|a-c| \frown |c| = b$ デアルカラ

$$|a-c| \frown |x| = b$$

トナル。

又 $|a| \frown |x| = b$ デアルカラ

$$|c| \frown |x| = b$$

従ッテ $c \in \mathfrak{A}(ab)$

即チ $\mathfrak{B}(ab) \subseteqq \mathfrak{A}(ab)$

定理5.5. $(a, b, c, d)_{fc}$ ナラバ

$$\mathfrak{A}(ab) = \mathfrak{A}(cd)$$

証. $(a, b, c, d)_{fc}$ ヨリ

$$c, d \in \mathfrak{B}(ab) \subseteqq \mathfrak{A}(ab)$$

従ッテ定理5.3ヨリ

$$\mathfrak{A}(cd) \subseteqq \mathfrak{A}(ab)$$

同様ニ $\mathfrak{A}(cd) \supseteqq \mathfrak{A}(ab)$

ヲ得ルカラ

$$\mathfrak{A}(cd) = \mathfrak{A}(ab)$$

定理5.6. $\mathfrak{B}(ab) = \mathfrak{B}(cd)$ ナラバ

$$\mathfrak{A}(ab) = \mathfrak{A}(cd)$$

証. $\mathfrak{B}(ab) = \mathfrak{B}(cd)$ デアレバ定理4.2.ヨリ $(a, b, c, d)_{R}$ トナルカラ定理5.5ヨリ証サレル。

§6. 射影

$\mathfrak{B}(ax)$ ト $\mathfrak{B}(bx)$ トノ共通元ノ中，$\mathfrak{A}(ab)$ ニ属スモノが存在スルトキ，ソノ元ヲ x ノ $\mathfrak{A}(ab)$ ヘノ射影ト云ヒ $P_{ab}x$ デ表ハス。

定理6.1. $(x, a, P_{ab}x, c)$ トスレバ a ハ b, c ノ直交因子デアル。

証. $(x, b, P_{ab}x, d)$ ナル d ヲ考ヘレバ，$(x, a, P_{ab}x, c)_{R}$，$(x, b, P_{ab}x, d)_{R}$ デアルカラ $(b, c, a, d)_{R}$ トナル。(定理3.8) 故ニ a ハ b, c ノ直交因子デアル。

定理6.2. $P_{ab}x$ ハ若シ存在スルナラバ一意ニ定マル。

証. x ノ $\mathfrak{A}(ab)$ ヘノ射影ヲ p_1, p_2 トスレバ (x, a, p_1, q_1)，(x, a, p_2, q_2) ナル q_1, q_2 ニ對シテ (p_1, q_1, p_2, q_2) トナル。

故ニ $p_1 \overline{a} p_2 = q_2 \overline{a} q_1$

然ルニ定理6.1ニヨリ q_1, q_2 ハ夫々 b ト，a ニ関シテ

直交スルカラ $q_2 \overline{a} q_1$ モ b ト，a ニ関シテ直交スル。然ルニ $p_1, p_2 \in \mathfrak{A}(ab)$ ヨリ $p_1 \overline{a} p_2 \in \mathfrak{A}(ab)$

依ツテ $|p_1 \overline{a} p_2|a \frown |p_1 \overline{a} p_2|a = a$

即チ $|p_1 \overline{a} p_2|a = a$

故ニ $p_1 \overline{a} p_2 = a$ ヨリ $p_1 = p_2$

定理6.3. $c \in \mathfrak{B}(ab)$ デアルタメノ完全條件ハ

$$P_{ac}\, b = c$$

証. $P_{ac}\, b = c$ ナラバ定義ヨリ $c \in \mathfrak{B}(ab)$.

次ニ $c \in \mathfrak{A}(ac)$ デアルカラ，$c \in \mathfrak{B}(ab)$, $c \in \mathfrak{B}(bc)$ ヨリ $P_{ac}\, b = c$ ヲ得ル。

定理6.4. p ガ a, b, c ノ二ツ宛ノ直交因子デアレバ

$$P_{ab}\, c = P_{bc}\, a = P_{ca}\, b = p$$

証 $p \in \mathfrak{B}(ab)$ デ定理5.4ヨリ

$$\mathfrak{B}(ab) \subseteqq \mathfrak{A}(ab)$$

デアルカラ

$$p \in \mathfrak{A}(ab)$$

且ツ $p \in \mathfrak{B}(bc)$, $p \in \mathfrak{B}(ca)$

デアルカラ

$$p = P_{ab}\, c.$$

定理6.5. $\mathfrak{B}(ab)$, $\mathfrak{B}(bc)$, $\mathfrak{B}(ca)$ ニ共通ナル元ハ二ツハ存在シナイ。

証. 定理6.4.ト定理6.2トカラ明カ。

定理6.6. $\mathfrak{A}(ab) = \mathfrak{A}(cd)$ ナラバ任意ノ x ニ對シ

テ

$$P_{ab}x = P_{cd}x$$

証. $P_{ab}x = p$ トスレバ

$$|a|_p \frown |x|_p = p,\quad |b|_p \frown |x|_p = p$$

故ニ $|a-b|_p \frown |x|_p = p$.（以下添元ナキ場合ハ p ニ関スル演算）

今 $y = x + b$ ト置ケバ

$$|a-b| \frown |y-b| = p$$

即チ $|a|_b \frown |y|_b = b$

又 $\mathfrak{L}(ab) = \mathfrak{L}(cd) \ni c$ ヨリ

$$|c|_b \frown |y|_b = b$$

即チ $|c-b| \frown |y-b| = p$

コレト $|a-b| \frown |y-b| = p$

トカラ $|c-a| \frown |y-b| = p$

従ッテ $|c-a| \frown |x| = p$

然ルニ $|a| \frown |x| = p$

デアルカラ $|c| \frown |x| = p$ トナリ, p ハ c ト x トノ直交因子トナル。同様ニ p ハ d ト x トノ直交因子トナリ且ツ $p \in \mathfrak{L}(ab) = \mathfrak{L}(cd)$ デアルカラ $p = P_{cd}x$ デアル。

定理6.7. $c, d, e \in \mathfrak{B}(ab)$ デ

$$\mathfrak{L}(ce) = \mathfrak{L}(de) \text{ ナラバ } c = d.$$

証 $(a, b, e, f)_h$ ナル f ヲトレバ

$\mathfrak{B}(ab) = \mathfrak{B}(ef)$ デアルカラ c ハ e, f ノ直交因子デアル。故ニ定理6.3ニヨリ $P_{ce}f = c$ トナル。同様ニ d モ e, f ノ直交因子デアルカラ

$$P_{de}f = d$$

然ルニ $\mathfrak{A}(ce) = \mathfrak{A}(de)$ デアルカラ 定理6.6ニヨリ

$$P_{ce}f = P_{de}f$$

即チ　$c = d$

定理6.8. $p \in \mathfrak{B}(ab)$ ト $\mathfrak{A}(p, a \cap b)$ トヲ對應サセレバ $\mathfrak{B}(ab)$ ト總テノ $\mathfrak{A}(p, a \cap b)$, $p \in \mathfrak{B}(ab)$ トハ束同型デアル。

證　$a \cap b \in \mathfrak{B}(ab)$ デアルカラ定理6.7ニヨリ此ノ對應ハ一對一デアル。且ツ $p \geqq a \cap b$ デアルカラ

$$\mathfrak{A}(p, a \cap b) \cup \mathfrak{A}(q, a \cap b) = \mathfrak{A}(p \cup q, a \cap b)$$

$$\mathfrak{A}(p, a \cap b) \cap \mathfrak{A}(q, a \cap b) = \mathfrak{A}(p \cap q, a \cap b)$$

トナル。[4] 故ニ束同型デアルコトガ分ル。

---

(4) 小笠原藤次郎, ベクトル束論(其ノ一), 定理5.2, 數物會誌第5巻第9号 (昭和17年)